DFT
Diskretna Furijeova transformacija
Discrete Fourier transform

Periodični signali - ponovo

Kontinualni – period T_p

CTFS

$$X[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-jk\omega_p t}dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_p]e^{jk\omega_p t}$$

$$gde \quad je \quad \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

Diskretni – period N

DTFS

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_p n}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\Omega_p n}$$

$$gde \quad je \quad \Omega_p = \frac{2\pi}{N}$$

Spektar uvek periodičan sa periodom N

$$X[k+N] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(k+N)n\Omega_p} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jkn\Omega_p}e^{-jkN\frac{2\pi}{N}} = X[k]$$

DTFS – Zašto je spektar periodičan? Gde je nestalo vreme, odnosno „prava“ učestanost?
Da li je ovo „izmišljena“ potpuno nova transformacija?

Aeriodični signali - ponovo

Kontinualni

CTFT

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Diskretni

DTFT

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

Spektar je beskonačan i periodičan sa periodom 2π

$$X[\Omega + 2\pi] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j(\Omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = X[\Omega]$$

DTFT – Zašto je spektar periodičan? Gde je nestalo vreme, odnosno „prava“ učestanost?
Da li je ovo „izmišljena“ potpuno nova transformacija?

Periodičnost spektra je posledica odabiranja!

Peirodična povorka delta impulsa ima beskonačan linijski spektar. Harmonijske komponente su iste amplitude i nalaze se na svim učestanostima koje su celobrojni multipl učestanosti periodične povorke delta impulsa odnosno na učestanostima $k\omega_s$.

$$X[jk\omega_s] = \frac{1}{T_s}\int_{T_s} \delta(t)e^{-jk\omega_s t}dt = \frac{1}{T_s}$$

Množenje u vremenskom domenu = konvolucija u frekventnom domenu

Konvolucija spektra signala sa spektrom periodične povorke delta impulsa daje periodičnost u spektru odabranog signala. Bilo da su signali periodični ili aperiodični, bilo da ima ili nema preklapanja spektara.

Odabiranje

Signal $x(t)$ odabiramo periodičnom povorkom delta impulsa sa periodom T_s $\quad o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

CTFT

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) e^{-j\omega t} dt \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) e^{-j\omega nT_s}$$

Normalizacija $\omega T_s = \Omega$ i $x(nT_s) = x[n]$

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

DTFT

Nije nova transformacija, ali ne vodimo računa o vremenu u proračunu

Isto tako

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_s t}$$

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_s t} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j(\omega - k\omega_s)t} dt \right)$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\big(j(\omega - k\omega_s)\big)$$

Periodičnost spektra

Rekonstrukcija signala

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\big(j(\omega - k\omega_s)\big)$$

Idealnim filtrom uzimamo samo osnovni deo spektra $Y_r(j\omega) = X_s(j\omega)H(j\omega)$

$$H(j\omega) = ? \qquad H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_g \\ 0 & |\omega| > \omega_g \end{cases} \quad \Rightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(H(j\omega)\big) = \frac{\sin(\omega_g t)}{\pi t}$$

Množenje u frekvencijskom = konvolucija u vremenskom

$$x_r(t) = x_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)h(t - nT_s)$$

$$\boxed{x_r(t) = \frac{\omega_g}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\frac{\sin(\omega_g(t - nT_s))}{\omega_g(t - nT_s)} = \frac{\omega_g}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\mathrm{sinc}(\omega_g(t - nT_s)) = x(t)?}$$

Ako nije bilo preklapanja spektara

Brown's Theorem

Dokaz daleko van okvira našeg kursa – nećemo dokazivati
Videli na primeru odabiranja prostoperiodičnih signala

$$\lim_{N\to\infty}\max_{t\in[-\tau,\tau]}\left| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} f(k)\frac{\sin\big(\pi(t-k)\big)}{\pi(t-k)}\right| = 0$$

DTFT $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$

Motivacija: $X(\Omega)$ spektar sa beskonačno mnogo tačaka. Nemoguće „izračunati“ ceo spektar čak i ako radimo sa konačnim brojem odmeraka, odnosno ako je signal $x(t)$ ograničen u vremenu.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-K}^{+L} x[n]e^{-j\Omega n}$$

U kojim tačkama Ω_{rac} da ga izračunamo a da dobijemo prave informacije o spektru, odnosno o signalu. Po mogućstvu da to bude minimalan broj tačaka.

$$X(\Omega_{rac}) = \sum_{n=-K}^{+L} x[n]e^{-j\Omega_{rac} n}$$

$x[n]$ aperiodičan signal, ali je $X(\Omega)$ periodičan spektar sa periodom 2π

$X(\Omega)$ periodičan spektar sa periodom 2π

Uradimo odabiranje spektra u opsegu 0 do 2π u N ekvidistantnih tačaka. N >2. Periodična funkcija, važi teorema odabiranja, uslov zadovoljen. Dobijamo „potrebne“ informacije. Možemo rekonstruisati spektar i saznati informacije o signalu. Ali kojem signalu? Koje su posledice i o čemu moramo voditi računa kada odabiramo signal. Osim da je signal spektralno ograničen i da uzmemo dovoljno tačaka, dovoljnom učestanošću, da nema preklapanja spektara. Ne zaboravite spektar ograničen, signal beskonačan, znači za signal bi nam trebalo beskonačno tačaka.
Jeste da računamo u konačnom broju tačaka spektar ali sa beskonačno tačaka signala. Uh!
Da vidimo šta se dešava. To su tačke u spektru

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

Da sumu prikažemo kao zbir parcijalnih suma veličine N

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} + \cdots$$

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=lN}^{lN+N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m+lN]e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m+lN)}\right)$$

$$m = n - lN$$

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[m+lN]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n-lN)}\right) = \sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[m+lN]\right)e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}$$

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[m+lN]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n-lN)}\right) = \sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[m+lN]\right)e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}$$

Pretpostavimo i da je taj signal periodičan sa periodom N

DTFS $$X_p[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

DTFS^{-1} $$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[m+lN] = \sum_{k=0}^{N-1} X_p[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Uz ovaj uslov

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = NX_p[k]$$

$$x_p[n] = x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X_p[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Znači ako u frekvencijskom domenu odaberemo N tačaka možemo rekonstruisati
neki
periodičan signal sa periodom N

Koji su uslovi da tu “bude” signal $x(n)$

1. $x_p(n)$ periodično produženje $x(n)$

2. $x_p(n)$ u periodi N se nalazi original $x(n)$

3. $x(n)$ ograničenog trajanja

4. N veće od trajanja tako da ne dolazi do preklapanja u vremenskom domenu

Mogli i drugačije

Spektar izračunali u N tačaka

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Na osnovu tih spektralnih linija (očigledno ćemo dobiti periodičan signal) rekonstruišemo neki signal

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Signal jeste periodičan sa periodom N,
a ovo $\frac{1}{N}$ je posledica toga što prilikom računa spektra nismo delili sa N što zahteva DTFS

Spektar signala napravili smatrajući da je signal ograničen u vremenu i uzeli samo M tačaka signala

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{M-1} x[m]\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}m}\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{M-1} x[m]\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{M}m-\frac{2\pi}{N}n\right)}\right)$$

Da bi $x_p[n] = x[n] \quad n = 0,1,\dots,N-1$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{M}m-\frac{2\pi}{N}n\right)} = \begin{cases} N & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Mora $N = M$

$$x_p[n] = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x[m]\left(\sum_{k=0}^{M-1} e^{-jk\frac{2\pi}{M}(m-n)}\right)$$

Znači

1. Signal $x[n]$ ograničen u vremenu
2. Uzimamo N ekvidistantnih tačaka signala u tom vremenskom intervalu. Van toga intervala $x[n] = 0$
3. Spektar računamo u N ekvidistantnih tačaka
4. Kao da smo posmatrali periodičan signal $x_p[n]$ koji je dobijen periodičnim produženjem signala $x[n]$

Uočiti da ako smo uzeli M tačaka signala a spektar „moramo“ da računamo u N tačaka $M < N$

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{M-1} x[m]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} + \sum_{m=M}^{N-M-1} 0 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

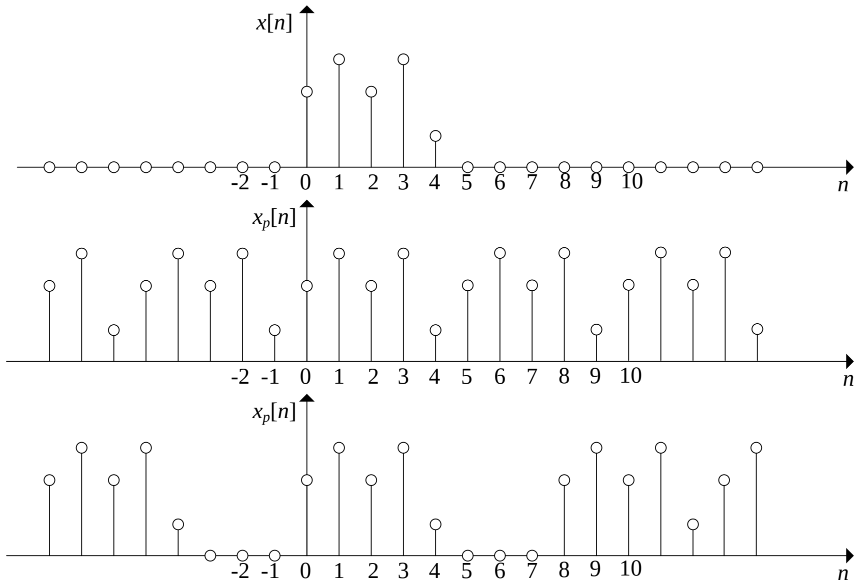
$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}m-\frac{2\pi}{N}n\right)}\right)$$

$$x_p[n] = x[n] \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

Pri čemu $x_p[M] = x[M] = x_p[M+1] = x[M+1] = \cdots = x_p[N-1] = x[N-1] = 0$

Imamo tačne informacije i ovim dodavanjem 0 u signal
pošto nam je ionako uslov za signal da je ograničen u vremenu

Periodično produženje



Da li je moguće iz odmeraka spektra rekonstruisati ceo spektar?

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right)e^{-j\Omega n}$$

$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right)e^{-j\Omega n}$$

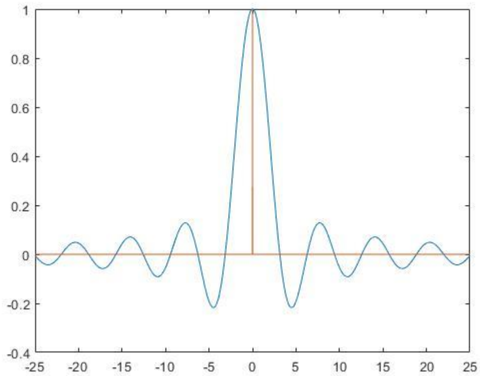
$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\Omega n - k\frac{2\pi}{N}n\right)}\right)$$

Interpolaciona funkcija

$$P(\Omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-e^{-j\Omega N}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}e^{-j\frac{\Omega(N-1)}{2}}$$

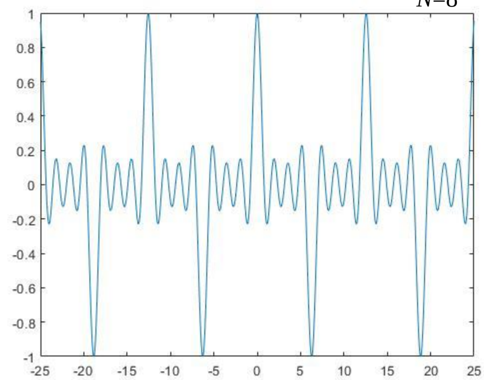
$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] P\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$\frac{\sin x}{x}$$



$$P(x) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{xN}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{-j\frac{x(N-1)}{2}}$$

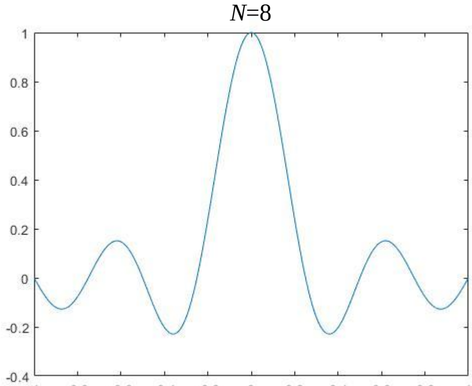
N=8



Perodična funkcija 2π

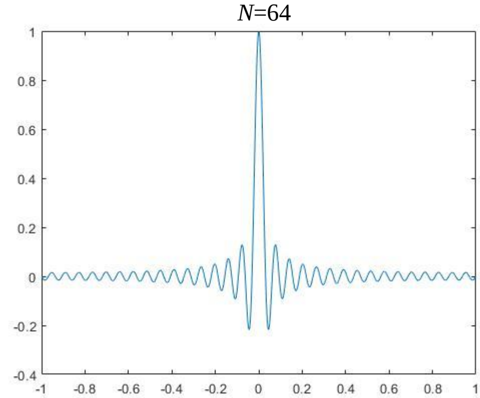
$P(x \cdot \pi)$

N=8



8 nula

N=64



64 nule

Moguće je rekonstruisati periodičnu sekvencu i njen spektar iz ekvidistantnih odbiraka u spektralnom domenu

Računamo u konačnom broju tačaka *N*

L – dužina aperiodične sekvence
N – broj odmeraka u spektralnom domenu

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & L \le n \le N-1 \end{cases}$$

Diskretna Furijeova transformacija - DFT

$$X[k] = X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

Inverzna diskretna Furijeova transformacija - IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Osnovna transformacija CTFS

$$X[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-jk\omega_p t}dt \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_p]e^{jk\omega_p t} \qquad gde \quad je \quad \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

Izvedena transformacija CTFT $T_p \to \infty$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Izvedena transformacija DTFS - odabiranje u vremenskom domenu

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_p n} \qquad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\Omega_p n} \qquad gde \quad je \quad \Omega_p = \frac{2\pi}{N}$$

Izvedena transformacija DTFT - odabiranje u vremenskom domenu

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

Izvedena transformacija DFT – odabiranje i u vremenskom i spektralnom domenu

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Puno pitanja se otvorilo

Učili smo da ako je signal ograničen u vremenu da mu je spektar beskonačan.
Znači odabiranje sigurno vodi ka preklapanju spektara.
A nama je uslov za DFT da je signal ograničen.
Da li to znači da smo u stvari kod DFTa podrazumevali da će biti preklapanja spektara.
Kako to utiče na naš račun?

Šta ako je signal već periodičan?
Koje tačke uzimamo u proračun.

Šta ako nismo uzeli sve tačke signala kada je „postojao“?

Koje uslove treba da zadovoljimo da dobijemo „dobre“ rezultate?

Ako već nismo uzeli tačke kako treba da li postoji mogućnost da popravimo i da dobijemo „dobre“ rezultate?

Odgovore na ova i slična pitanja daje nam ovaj kurs
kao i drugi kursevi koji se naslanjaju na ovaj.

Računanje i analiza:

1. Odabiramo signal učestanošću ω_s AD konvertorom
2. Odmerke posmatramo kao niz brojeva $x[n]$ odnosno kao diskretan signal
3. Računamo DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

4. Spektar crtamo i analiziramo u frekventnom domenu
5. Spektar je periodičan sa periodom $N\frac{2\pi}{N}$ odnosno 2π (znamo da je to ω_s)
6. Spektralne linije će se naći na multiplima $\frac{2\pi}{N}$ pa ćemo to nazvati digitalnim učestanostima odnosno $\Omega_p = \frac{2\pi}{N}$ (znamo da je to $\frac{\omega_s}{N}$)

Nismo izgubili informacije računajući DFT umesto CTFS(T)

Računanje i sinteza:

1. Radimo sintezu u frekventnom domenu
2. Dodajemo, oduzimamo, spektralne linije $X[k]$, menjamo amplitude i faze ….
3. Spektralne linije su na multiplima $\frac{2\pi}{N}$ odnosno digitalnim učestanostima $\Omega_p = \frac{2\pi}{N}$
4. Spektar je periodičan sa periodom 2π pa sve što radimo radimo u tom opsegu. Doduše u opsegu $-\pi$ do $+\pi$ (negativne učestanosti), odnosno 0 do $+\pi$ (spektar je „simetričan“) ali o tome i kasnije.
5. Računamo inverznu DFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\Omega_p n}$$

6. Diskretan signal odnosno, niz brojeva $x[n]$ dovodimo na ulaz DA konvertora sa učestanošću ω_s
7. Signal na izlazu idealnog konvertora će imati osnovnu učestanost $\frac{\omega_s}{N}$ i harmonijske komponente na učestanostima koje su mutipl učestanosti $\frac{\omega_s}{N}$

Koja je maksimalna učestanost u izlaznom signal koju možemo da ostvarimo sa ω_s i N?

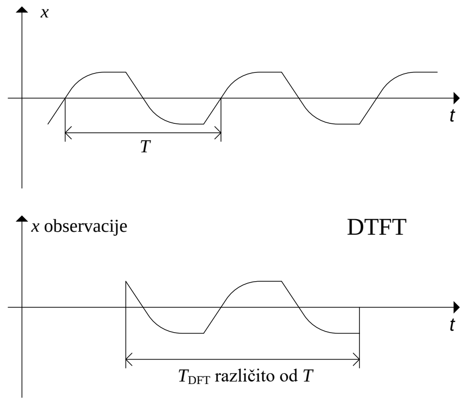
Obrada:

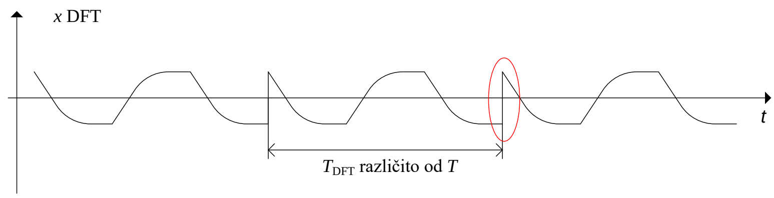
1. Odabiramo signal učestanošću ω_x AD konvertorom
2. Odmerke posmatramo kao niz brojeva $x[n]$ odnosno kao diskretan signal
3. Radimo obradu tog niza brojeva. FILTRIRANJE. Dobijamo niz $y[n]$
4. Diskretan signal odnosno, niz brojeva $y[n]$ dovodimo na ulaz DA konvertora sa učestanošću ω_y

5. Uočite ω_x ne mora biti jednako ω_y

DFT

Kao da smo odabirali periodičan signal. U slučaju da odabiramo periodičan signal, ili aperiodičan koji ima deo periodičnog signala javiće nam se „čudne situacije“ ako je period računanja DFTa različit od perioda signala.

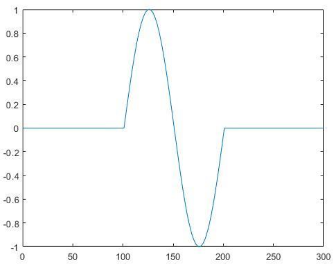




CURENJE SPEKTRA
SPEKTRALNO CURENJE
SPECTRAL LEAKAGE

Curenje spektra – posledica DFTa odnosno njegovog računanja. POGREŠNO.

Curenje spektra je posledica nekoherentnog odmeravanja periodičnih signala.
Šta ovde podrazumevamo pod periodičnim signalima.



Primer odabiranja aperiodičnog signala koji sadrži deo periodičnog signala. Izveli.

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j(\omega_p-\omega)nT_s} - e^{-j(\omega_p+\omega)nT_s}}{2j}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = r\omega_p = \frac{r\cdot 2\pi}{T_p} \quad r \in R$$

$$T_s = \frac{T_p}{r} \quad r \in R \qquad N = \lfloor r \rfloor$$

Postoji preklapanje spektara.
A možda postoji i curenje spektara.
Dva odvojena fenomena?

29

Da se podsetimo. Spektar bez odabiranja.

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j\omega_p}\cdot e^{j(\omega_p-\omega)\frac{\pi}{\omega_p}}\cdot \mathrm{sinc}\left((\omega_p-\omega)\frac{\pi}{\omega_p}\right) - \frac{\pi}{j\omega_p}\cdot e^{-j(\omega_p+\omega)\frac{\pi}{\omega_p}}\cdot \mathrm{sinc}\left((\omega_p+\omega)\frac{\pi}{\omega_p}\right)$$

Na učestanosti $\omega = k\omega_p$ $k \in Z$ i $k \neq 1$ spektar jednak 0.
Da bi očuvali prilikom preklapanja spektara harmonijsku komponentu na osnovnoj učestanosti sa $\omega_s = r\omega_p$ mora i $r \in Z$, kao i da ostanu 0 na $k\omega_p$

Spektar posle odabiranja

$$X(j\omega) = \frac{N}{2j} e^{j(\omega_p-\omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\mathrm{sinc}\left((\omega_p-\omega)N\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}{\mathrm{sinc}\left((\omega_p-\omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)} - \frac{N}{2j} e^{-j(\omega_p+\omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\mathrm{sinc}\left((\omega_p+\omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}{\mathrm{sinc}\left((\omega_p+\omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}$$

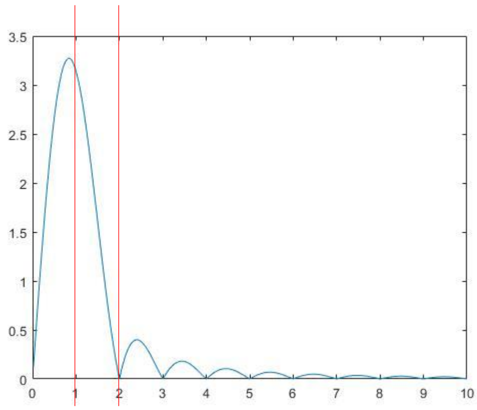
Da bi na učestanostima $k\omega = k\omega_p$ i $k \neq \pm 1$ spektar odabranog signala bio 0
mora $r = N$ odnosno r mora biti ceo broj odnosno mora biti „koherentno odmeravanje". A ako jeste

$$X(j\omega) = \frac{1}{T_s}\frac{\pi}{j\omega_p} e^{j(\omega_p-\omega)(N-1)\frac{\pi}{N\omega_p}} \cdot \frac{\mathrm{sinc}\left((\omega_p-\omega)\frac{\pi}{\omega_p}\right)}{\mathrm{sinc}\left((\omega_p-\omega)\frac{\pi}{N\omega_p}\right)} - \frac{1}{T_s}\frac{\pi}{j\omega_p} e^{-j(\omega_p+\omega)(N-1)\frac{\pi}{N\omega_p}} \cdot \frac{\mathrm{sinc}\left((\omega_p+\omega)\frac{\pi}{\omega_p}\right)}{\mathrm{sinc}\left((\omega_p+\omega)\frac{\pi}{N\omega_p}\right)}$$

30

Pravi spektar – nastao odsecanjem periodičnog signala

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j\omega_p} \cdot e^{j(\omega_p - \omega)\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \mathrm{sinc}\left((\omega_p - \omega)\frac{\pi}{\omega_p}\right) - \frac{\pi}{j\omega_p} \cdot e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \mathrm{sinc}\left((\omega_p + \omega)\frac{\pi}{\omega_p}\right)$$

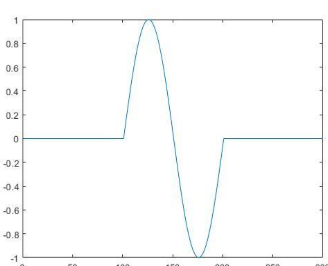


$X(j1) = \pi \qquad \omega_p = 1$

Ako računamo DFT

1. odabiramo signal na primer u 8 tačaka
2. DFT je računanje odmeraka u spektru u 8 tačaka. Znači u tačkama 0, 1, 2 … 7

Primer odabiranja aperiodičnog signala koji sadrži deo periodičnog signala.
Izveli.



$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j(\omega_p - \omega)nT_s} - e^{-j(\omega_p + \omega)nT_s}}{2j}$$

Za eksperimente ćemo fiksirati $N = 8, \omega_s = 8$
a menjati r odnosno ω_p

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = r\omega_p = \frac{r \cdot 2\pi}{T_p} \quad \mathrm{r} \in R$$

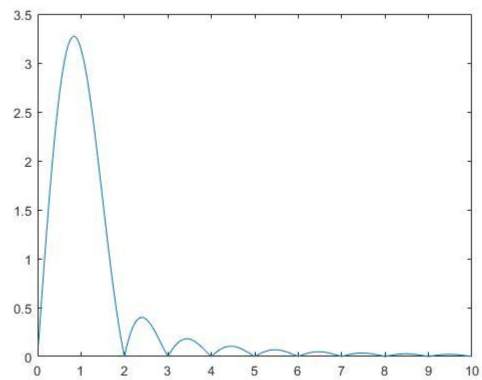
$$\omega_p = \frac{\omega_s}{r} \quad \mathrm{r} \in R$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi n\left(\frac{1}{r} - \frac{\omega}{\omega_s}\right)} - e^{-j2\pi n\left(\frac{1}{r} + \frac{\omega}{\omega_s}\right)}}{2j}$$

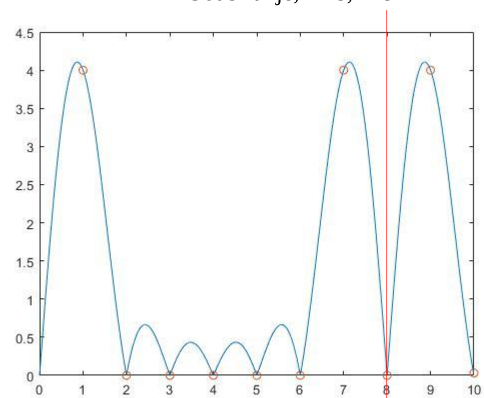
Postoji preklapanje spektara.
A možda postoji i curenje spektara.
Dva odvojena fenomena?

Kružići – šta bi izračunali DFTom

Pravi



Odabiranje, N=8, r=8

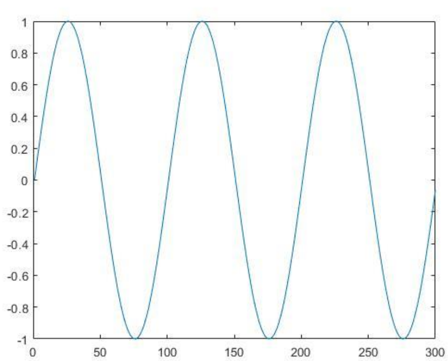


$$\omega_s = 8\omega_p \Rightarrow 8T_s = \frac{8}{8}T_p = T_p$$

Koherentno, ima preklapanja,
ali u tačkama 0, 1, 2, … 7 dobro.

$X[1] = 4,\qquad \mathrm{X}[0] = \mathrm{X}[2] = \mathrm{X}[3] = \mathrm{X}[4] = 0$

Šta bi u stvari DFT računao



DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

PRAVI

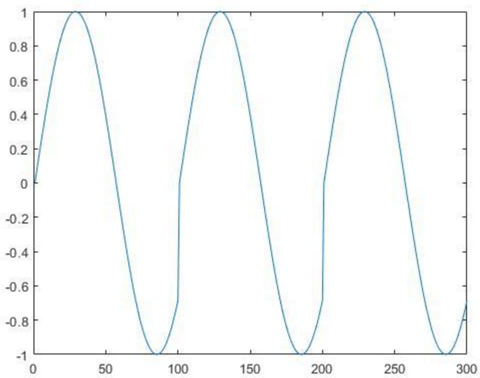
$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi n\left(\frac{1}{r}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)} - e^{-j2\pi n\left(\frac{1}{r}+\frac{\omega}{\omega_s}\right)}}{2j}$$

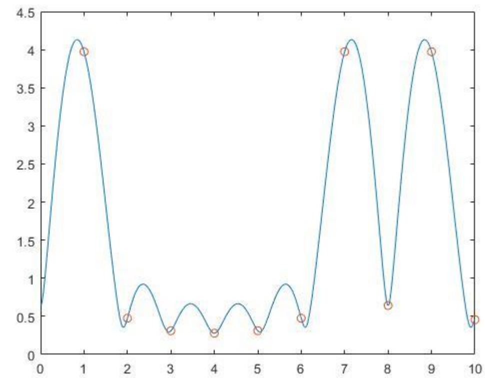
$$X\left(jk\frac{\omega_s}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi n\left(\frac{1}{r}-\frac{k}{N}\right)} - e^{-j2\pi n\left(\frac{1}{r}+\frac{k}{N}\right)}}{2j}$$

$$X\left(jk\frac{\omega_s}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{e^{j2\pi n\frac{1}{r}} - e^{-j2\pi n\frac{1}{r}}}{2j}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X\left(jk\frac{\omega_s}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Odabiranje, N=8, r=9



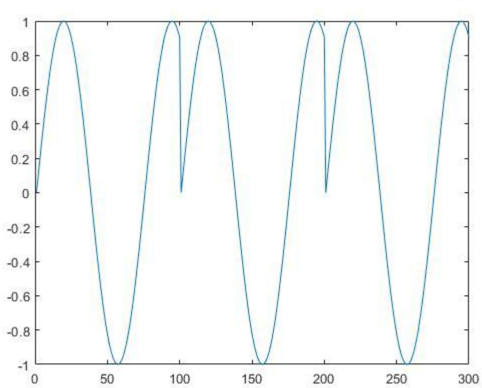


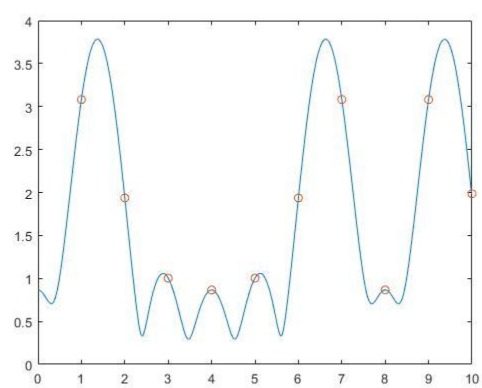
$$\omega_p = \frac{\omega_s}{9} \Rightarrow 8T_s = \frac{8}{9}T_p < T_p$$

Nije koherentno.
Preklapanje spektara i u tačkama 0, 1, 2, …, 7
Curenje spektra

$X[1] = 3.972,\quad X[0] \neq X[2] \neq X[3] \neq X[4] \neq 0$

Odabiranje, N=8, r=6



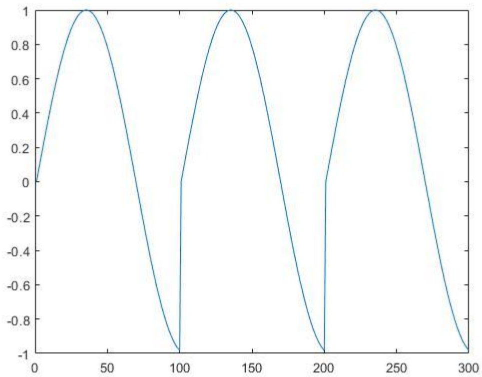


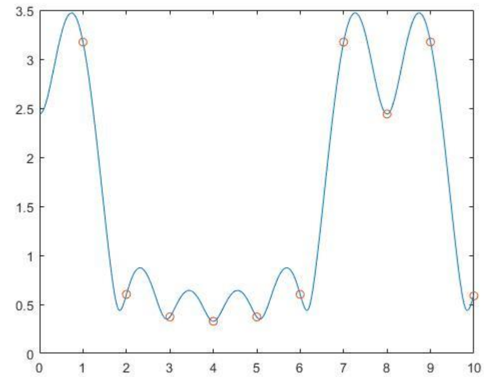
$$\omega_p = \frac{\omega_s}{6} \Rightarrow 8T_s = \frac{8}{6}T_p = \frac{4}{3}T_p \neq kT_p$$

Nije koherentno.
Veliko preklapanje spektara i u tačkama 0, 1, 2, …, 7
Curenje spektra

$X[1] = 3.081, X[0] \neq X[2] \neq X[3] \neq X[4] \neq 0$

Odabiranje, N=8, r=11



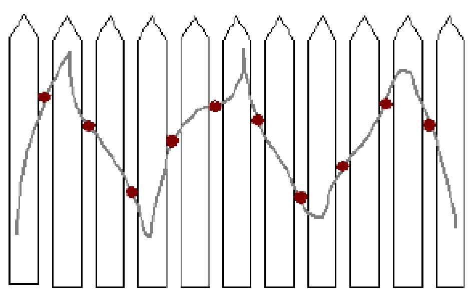


$$\omega_p = \frac{\omega_s}{11} \Rightarrow 8T_s = \frac{8}{11}T_p \neq kT_p$$

Nije koherentno.
Veliko preklapanje spektara i u tačkama 0, 1, 2, …, 7
Curenje spektra

$X[1] = 3.173, \qquad \mathrm{X}[0] \neq \mathrm{X}[2] \neq \mathrm{X}[3] \neq \mathrm{X}[4] \neq 0$

Picket-fence effect



Prema pravom spektru – DFT se ponaša kao da ga posmatramo kroz uske proreze „tarabe“.
Odatle i naziv.
Broj proreza smo odredili brojem tačaka N a gustinu učestanošću odabirana f_s.
Ali ono što morate UOČITI. Mogu da nam „pobegnu“ maksimumi i minimumi spektra.

Prorez = DFT bin

FREKVENCIJSKA REZOLUCIJA DFTa

PRAVI SPEKTAR KOHERENTNO ODABRANOG PERIODIČNOG SIGNALA U *N* TAČAKA

$$X[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-jk\omega_p t}dt \quad gde \quad je \quad \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

Odabiramo *N* tačaka u jednoj periodi signala $\omega_s = N\omega_p$

$$X[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p}\int_{T_p}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right)e^{-jk\omega_p t}dt = \frac{1}{T_p}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\omega_p nT_s} = \frac{1}{T_p}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j2\pi kn\frac{\omega_p}{\omega_s}}$$

$$X[j(k+1)\omega_p] = \frac{1}{T_p}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j2\pi(k+1)n\frac{\omega_p}{\omega_s}} = \frac{1}{T_p}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j2\pi kn\frac{\omega_p}{\omega_s}}e^{-j2\pi n\frac{\omega_p}{\omega_s}}$$

Izveden DFT – izbačeno vreme

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

„ISTO“ to smo i hteli

Pitanje koje se postavlja jeste:
Koliko blisko po učestanosti mogu da budu dve prostoperiodične, harmonijske, komponente a da se vide u spektru?

Uočite da to određuje faktor $e^{-j2\pi n\frac{\omega_p}{\omega_s}}$ odnosno $\frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{1}{N}$

Harmonijske komponente pravog spektra periodičnog signala se nalaze na učestanostima

$$FR = \frac{\omega_s}{N} = \omega_p$$

Ovo N smo birali tako da imamo više od 2 odmeraka za prostoperiodičnu komponentu najviše učestanosti, odnosno birali smo da učestanost odabranja bude

$$\omega_s > 2\omega_g$$

da ne dođe do preklapanja spektara i sa njime odredili frekvencijsku rezoluciju.

Znači $\omega_g = k_{max}\omega_p \Rightarrow \omega_s > 2k_{max}\omega_p \Rightarrow \frac{\omega_s}{\omega_p} = N > 2k_{max}$

DFT mi u principu koristimo da bi nešto videli u signalu. Znači unapred baš i ne poznajemo signal da bi sigurno uradili koherentno odmeravanje. Jedino nam je na raspolaganju izbor ω_s i N. Međutim, ne zaboravite da smo u stvari sa DFTom napravili periodično produženje signala, i računali spektar kao da je taj signal periodičan sa periodom $T_p = NT_s$. Iz ovoga direktno proizilazi da će nam i frekvencijska rezolucija DFTa biti

$$\omega_p = \frac{\omega_s}{N}$$

A pošto smo izbacili dimenziju vremena $\omega_p T_s = \frac{2\pi}{N}$

$$FR = \frac{2\pi}{N}$$

Eksperiment – odabiramo kompleksan prostoperiodičan signal – menjamo mu učestanost

Posmatramo kako je izračunat DFT za pojedine vrednosti učestanosti signala

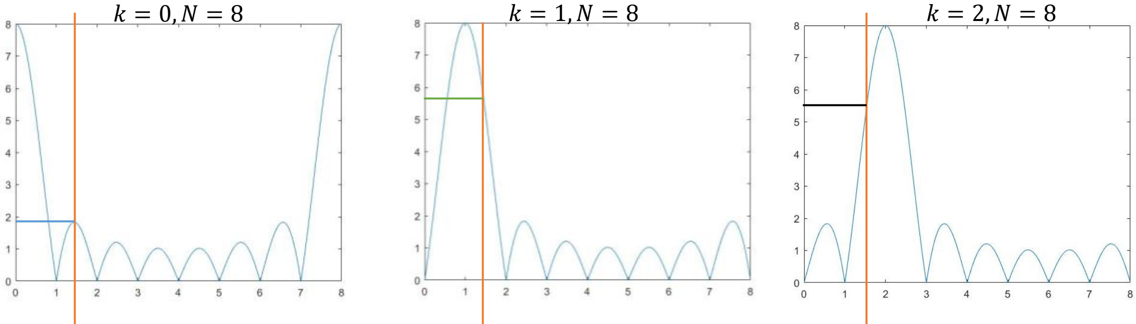
$$x[n] = e^{j\Omega n} = e^{j2\pi\frac{\omega}{\omega_s}n}$$

Odabran u N tačaka

$$X[k,\omega] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{\omega}{\omega_s}n} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1 - e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)N}}{1 - e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)}} = e^{-j\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)(N-1)} \frac{e^{j\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)N} - e^{-j\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)N}}{e^{j\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)} - e^{j\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)}}$$

$$X[k,\omega] = e^{-j\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)(N-1)} \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right)} = Ne^{-j\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)(N-1)} \frac{\mathrm{sinc}\left(\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)N\right)}{\mathrm{sinc}\left(\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right)}$$

$$X[k,\omega\,] = Ne^{-j\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)(N-1)}\frac{\operatorname{sinc}\left(\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)N\right)}{\operatorname{sinc}\left(\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right)}$$

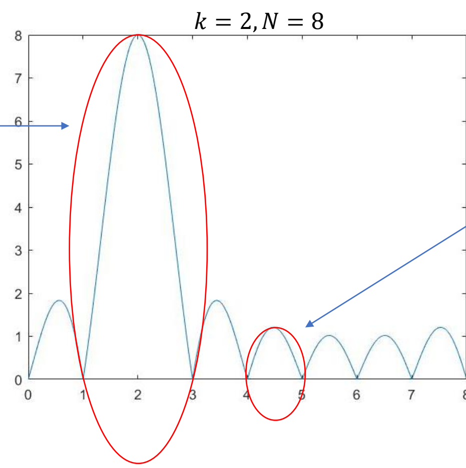


$peak \leftrightarrow 0 \cdot \frac{\omega_s}{8}$ $peak \leftrightarrow 1 \cdot \frac{\omega_s}{8}$ $peak \leftrightarrow 2 \cdot \frac{\omega_s}{8}$

Učestanost signala $\frac{1.5\omega_s}{8} = \frac{3\omega_s}{16}$

Curenje spektra
- Izračunato u 0. harmoniku
- Izračunato u 1. harmoniku
- Izračunato u 2. harmoniku

Glavni luk
Širina 2
U opštem slučaju $2 \cdot \frac{2\pi}{N}$

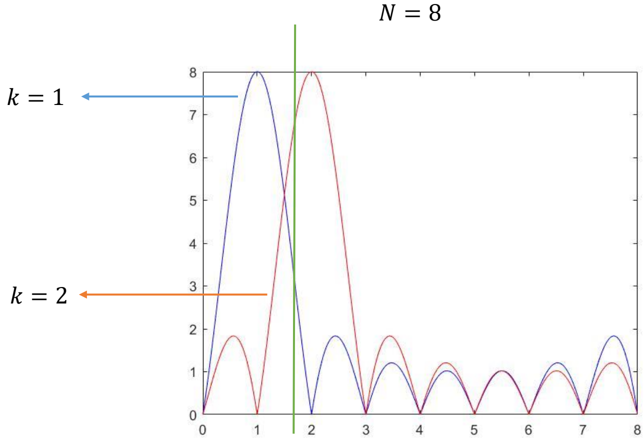


Bočni lukovi
Širina 1
U opštem slučaju $1 \cdot \frac{2\pi}{N}$

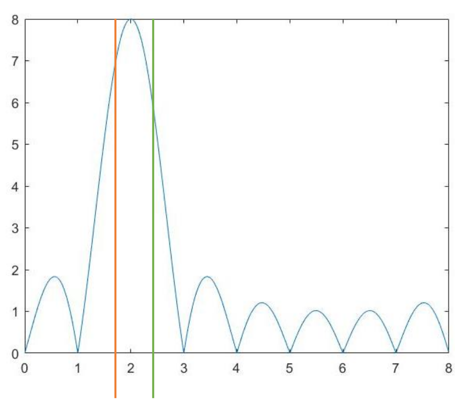
Izgled amplitudske karakteristike DFTa za računanje drugog harmonika signala odabranog u 8 tačaka

Curenje spektra – „najodgovorniji“ bočni lukovi, njihova amplituda.
Rastojanje između dve nule bočnih lukova je $\frac{2\pi}{N}$ što takođe pokazuje frekvencijsku rezoluciju DFTa

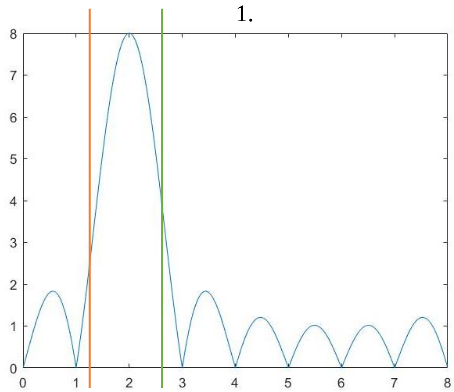
$N = 8$

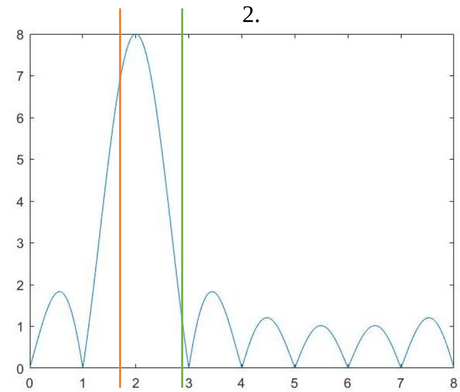


Širina glavnog luka je dvostruko veća od širine bočnih lukova.
Ako je učestanost signala takva (zelena linija) da upada u region preklapanja glavnih lukova, u izračunatim harmonicima će se videti ta učestanost i na jednom i na drugom harmoniku.
Ovaj efekat se naziva *scalloping loss* ili *picket fence.*
Uočite da će on uvek postojati (bilo levo ili desno), osim kada se nalazi tačno na sredini glavnog luka (koherentno odabiranje).



Uočiti: Ako postoje ovakve dve komponente u signalu, one ne mogu da se „razdvoje".
Dve komponente u glavnom luku sa razmakom manjim od frekvencijske rezolucije $\frac{2\pi}{N}$ (1).
Pojaviće se kao jedinstvena vrednost u ovom harmoniku, a crvena će se pojaviti u levom glavnom luku, susednom harmoniku k-1, zelena u desnom glavnom luku k+1: to su neke druge učestanosti.
A „isto" će curiti levo i desno





Uočiti: Ako postoje ovakve dve komponente u signalu, one „mogu“ da se razdvoje.
Dve komponente u glavnom luku sa razmakom većim od frekvencijske rezolucije $\frac{2\pi}{N}$ (1).

1. Crvena u *k*-1 glavnom luku sa većom vrednosti (bliža je po učestanosti tom harmoniku), zelena u *k*+1 glavnom luku (bliža je po učestanosti tom harmoniku) .
2. Crvena u *k* glavnom luku sa većom vrednosti (bliža je po učestanosti tom harmoniku), zelena u *k*+1 glavnom luku (bliža je po učestanosti tom harmoniku).

Zero padding
Dodavanje nula

Posmatramo aperiodičan signal $x[n]$

DTFT $$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$ Period 2π

Odabrali *N* tačaka, smatramo da je van toga signal jednak nuli

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

U spektru odabrali *M, M >N,* ekvidistantnih tačaka u opsegu 0 do 2 π.
Hoćemo da „bolje“ odaberemo spektar.
Na osnovu tih spektralnih linija rekonstruišemo neki signal

$$y[l] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left[jk\frac{2\pi}{M}\right] e^{j\frac{2\pi}{M}kl}$$

$$y[l] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left[jk\frac{2\pi}{M}\right] e^{j\frac{2\pi}{M}kl}$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$y[l] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}\right) e^{j\frac{2\pi}{M}kl} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{j\frac{2\pi}{M}k(l-n)}\right)$$

$$y[l] = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}k(l-n)}\right) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\frac{1-\left(e^{j\frac{2\pi}{M}(l-n)}\right)^M}{1-e^{j\frac{2\pi}{M}(l-n)}} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\frac{1-e^{j2\pi(l-n)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{M}(l-n)}}$$

$$y[l] = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\frac{1-e^{j2\pi(l-n)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{M}(l-n)}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{M}(l-n)(M-1)}\frac{\mathrm{sinc}\big(\pi(l-n)\big)}{\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{M}(l-n)\right)}$$

$$l \neq n \;\Rightarrow\; \mathrm{sinc}\big(\pi(l-n)\big) = 0 \qquad \Rightarrow\; y[l] = 0$$

$$l = n \;\Rightarrow\; \mathrm{sinc}\big(\pi(l-n)\big) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{M}(l-n)\right) = 1 \;\Rightarrow\; y[l] = x[n]$$

1. Nismo dobili neželjene efekte u signalu ako smo “bolje” odabrali spektar
2. U opsegu 0 do *N*-1 dobijamo isti signal, van tog opsega signal jednak nuli
3. Jedini „možda“ neželjeni efekat jeste da smo dobili signal dužine *M* koji je u opsegu *N* do *M-1* jednak nuli

Kod aperiodičnih signala koji zaista jesu nula van opsega 0 do *N*-1 taj efekat je korektan i nije neželjeni. Međutim kod periodičnih signala koje smo ili nismo koherentno odabrali, periodično produženje sa ovim nulama može da nam napravi problem.

Dodavanje nula - zero padding

Čemu sve ovo?

Frekvencijska rezolucija $\dfrac{2\pi}{Broj\ tačaka\ odabiranja}$

Ideja: nule signala u sumiranju daju nule i ne „utiču“ na rezultat.

1. Da bi povećali broj tačaka odbiranja, odabiramo signal van opsega, odnosno kada je jednak nuli

ILI

2. U odabrani signal dodamo M-N nula tako da umesto N tačaka dobijemo ukupno M tačaka sa nadom da će nam se frekvencijska rezolucija poboljšati i biti

$$FR = \frac{2\pi}{M}$$

POGREŠNO

DFT – Odabrali smo M linija u spektru, ali nismo dobili i dodatne informacije o spektru

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

Spektar je određen sa N tačaka odabranog signala i potpuno određen sa svojih N ekvidistantnih odmeraka.

Frekvencijska rezolucija $\frac{2\pi}{N}$ bez obzira koliko nula dodali

Frekvencijska rezolucija mora da se poveća, veće N,

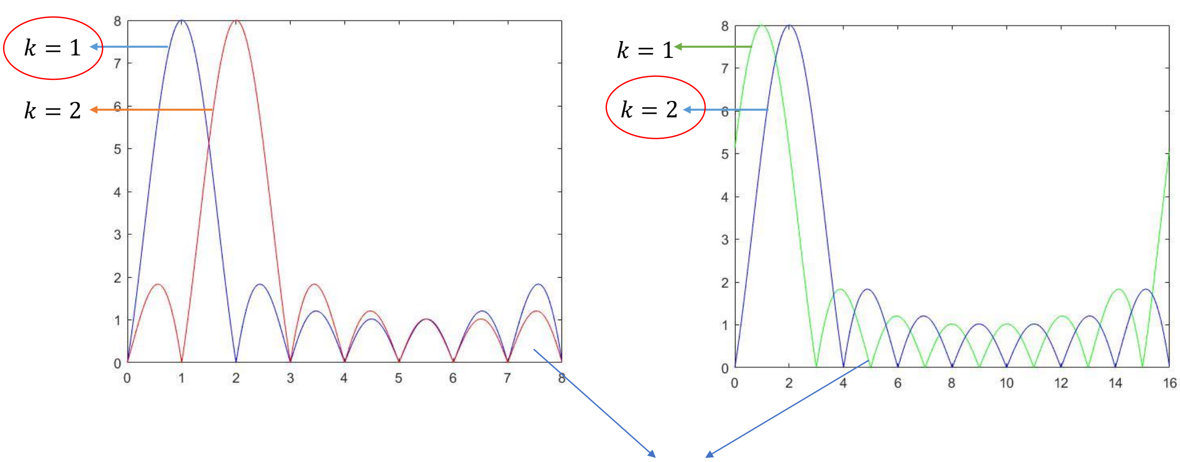
1. Trajanjem odabiranja (kada je signal različiti od nule)

I/ILI

2. Povećanjem učestanosti odabiranja

DFT u 8 tacaka
8 tacaka odabranih

DFT u 16 tacaka
8 tacaka odabranih
8 dodatih nula

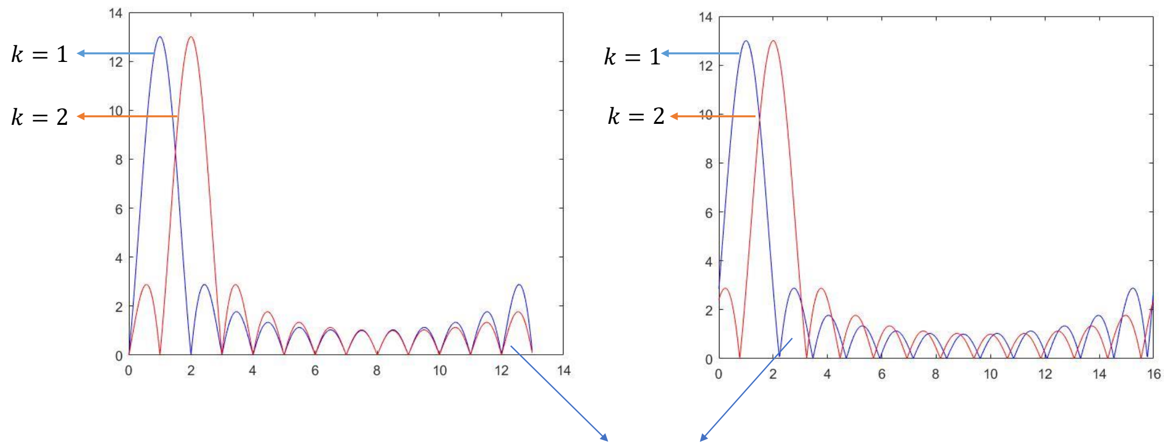


Razmak nula lukova određuje frekvencijsku selektivnost – isti razmak

$$1 \cdot \frac{2\pi}{8} = 2 \cdot \frac{2\pi}{16}$$

DFT u 13 tacaka
13 tacaka odabranih

DFT u 16 tacaka
13 tacaka odabranih
3 dodatih nula



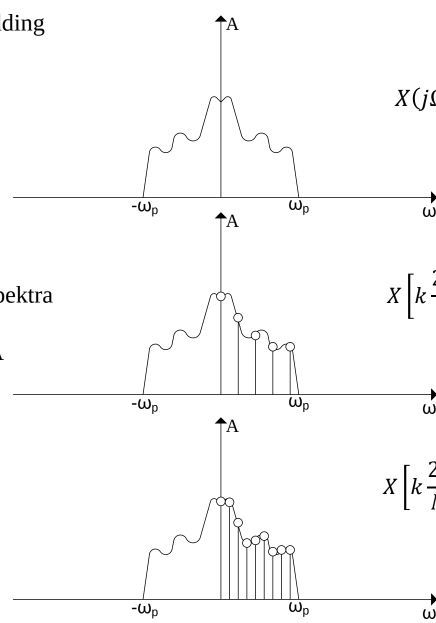
Razmak nula lukova određuje frekvencijsku selektivnost – isti razmak

$$1 \cdot \frac{2\pi}{13} = \frac{16}{13} \cdot \frac{2\pi}{16}$$

Dodavanje nula - zero padding

Spektar određen
odmercima odnosno
brojem tačaka N

Pokušaj bolje estimacije spektra
1. ulaznog signala - NE
2. signala odmeraka - DA



$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X\left[k\frac{2\pi}{M}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n}$$

Još jednom – frekvencijska rezolucija – sa f

Odabiramo učestanošću f_s kompleksni signal učestanosti f u N tačaka $\quad x[n] = e^{j2\pi n\frac{f}{f_s}}$

spektar $\quad X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n\frac{F}{F_s}} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}$

$$X(j\Omega) = \frac{1-\left(e^{j\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}\right)^N}{1-e^{j\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}} = \frac{e^{j\frac{N}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}}{e^{j\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}} \frac{e^{-j\frac{N}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}-e^{j\frac{N}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}}{e^{-j\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}-e^{j\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)}}$$

$$X(j\Omega) = e^{j\frac{N-1}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right)\right)}$$

Dve susedne vrednosti gde je gornji sinus jednak nuli, donji različit od nule crtajući grafik za jedno Ω u zavisnosti od normalizovane učestanosti f

$$\frac{N}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right) = \pi \;\Rightarrow\; 2\pi\frac{f}{f_s} = \frac{2\pi}{N} + \Omega$$

$$\frac{N}{2}\left(2\pi\frac{f}{f_s}-\Omega\right) = 2\pi \Rightarrow 2\pi\frac{f}{f_s} = \frac{4\pi}{N} + \Omega$$

Frekvencijska rezolucija $\frac{2\pi}{N}$

Još jednom – dodavanje nula – „bezazleno“

Odabrali N tačaka i dobili signal $x[n]$
Dodali M-N nula na kraj signala $x[n]$ i dobili signal y$[n]$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$Y(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} y[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n} = X(j\Omega)$$

Spektar ostaje isti!

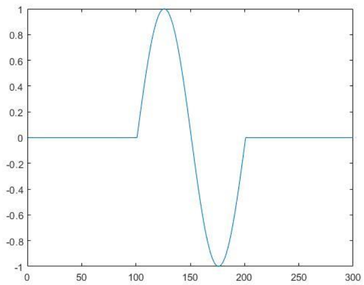
Više nego logično pošto smo smatrali da je $x[n] = 0 \quad n < 0 \wedge n > N-1$

DFT odabiranje u spektru ili definicija

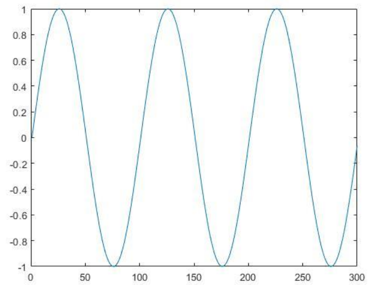
$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$Y\left[k\frac{2\pi}{M}\right] = \sum_{n=0}^{M-1} y[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} = X\left[k\frac{2\pi}{M}\right]$$

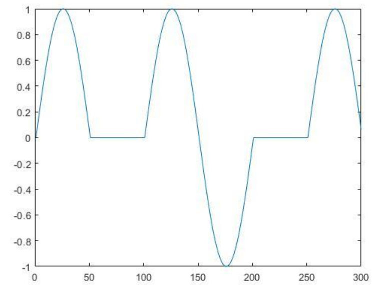
?SPEKTAR



Originalni aperiodični signal



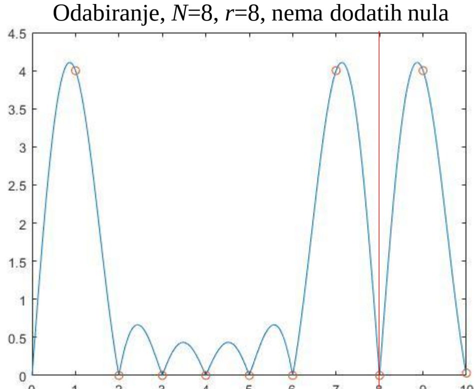
Koherentno odabiranje
DFT periodično produženje



Koherentno odabiranje
Dodate nule
DFT periodično produženje

Da se podsetimo - kružići – šta bi izračunali DFTom

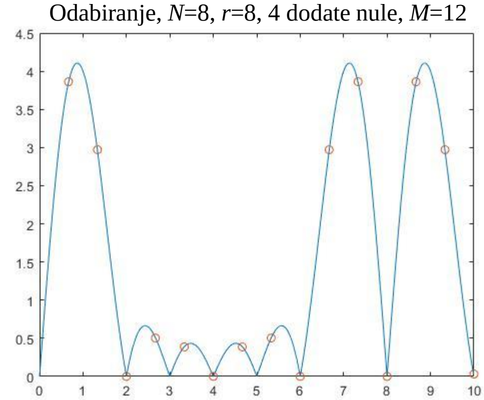
Odabiranje, N=8, r=8, nema dodatih nula



$$\omega_s = 8\omega_p \Rightarrow 8T_s = \frac{8}{8}T_p = T_p$$

Koherentno, ima preklapanja,
ali u tačkama 0, 1, 2, … 7 dobro.
$X[1] = 4,\qquad \mathrm{X}[0] = \mathrm{X}[2] = \mathrm{X}[3] = \mathrm{X}[4] = 0$

Odabiranje, N=8, r=8, 4 dodate nule, M=12



Da li odabiramo u istim tačkama?
ω_s ostaje isto. Spektar ostaje isti.
Odabiramo u drugim tačkama

$$\omega_p = \frac{\omega_s}{12}$$

Diskretna Furijeova transformacija - DFT

$$X[k] = X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

Inverzna diskretna Furijeova transformacija - IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Parsevalova teorema

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Snage su jednake
SAMO U OSNOVNOM OPSEGU HARMONIKA

Matrični oblik

DFT

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

gde je $W_N = e^{-j2\pi/N}$

twiddle factor
rotirajući faktor …

IDFT

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1}\mathbf{X}_N = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^{*}\mathbf{X}_N$$

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^{*} = N\mathbf{I}_N$$

OSOBINE

Linearnost: $$ax_1[n] + ax_2[n] \xleftrightarrow{DFT} aX_1[k] + aX_2[k]$$

Periodičnost: $$X[k] = X[k+N]$$

Konjugovana kompleksnost: $$x^*[n] \xleftrightarrow{DFT} X^*[N-k]$$

$$X[k] = X^*[N-k]$$

$$X_R[k] = X_R[N-k]$$

$$X_I[k] = -X_I[N-k]$$

$$|X[k]| = |X[N-k]|$$

$$\arg(X[k]) = -\arg(X[N-k])$$

$x[n] = x[-n] \Rightarrow X[k]$ je čisto realna sekvenca

$x[n] = -x[-n] \Rightarrow X[k]$ je čisto imaginarna sekvenca

Dokazati Parsevalovu teoremu za DFT

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X[k]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\cdot X[k]^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right)\left(\sum_{l=0}^{N-1}x[l]^*\,e^{+j\frac{2\pi}{N}kl}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\left(\sum_{l=0}^{N-1}x[l]^*\,e^{+j\frac{2\pi}{N}k(l-n)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\left(\sum_{l=0}^{N-1}x[l]^*\left(\sum_{k=0}^{N-1}e^{+j\frac{2\pi}{N}k(l-n)}\right)\right)$$

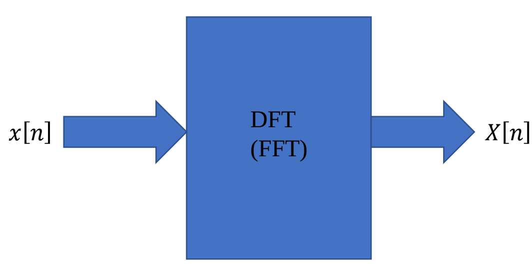
$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{+j\frac{2\pi}{N}k(l-n)} = \begin{cases} N, & l = n \\ 0, & l \neq n \end{cases}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X[k]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]x[n]^*\cdot(N) = \sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2$$

Korišćenje DFTa

Ideja: Realizujemo program koji računa DFT. Bilo softverski bilo hardverski.

Postoje algoritimi da se se DFT brzo izračuna.
FFT - Fast Fourier Transform. Nije nova transformacija.



Diskretna Furijeova transformacija - DFT

$$X[k] = X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

Inverzna diskretna Furijeova transformacija - IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Pristup

$$x^*[n] = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right)^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

odnosno, za izračunavanje inverzne DFT može se iskoristiti isti program kao za direktnu DFT, samo što se kao ulazna sekvenca koristi $X^*[k]$ umesto $X[k]$ i što se za izlaznu sekvencu dobija $x^*[n]$ umesto $x[n]$. To praktično znači da se elementima imaginarnog dela sekvence $X[k]$ promeni znak i da u dobijenoj izlaznoj sekvenci, $x^*[n]$, treba promeniti znak elementima imaginarnog dela sekvence.
Operacije promene znaka vrlo malo povećavaju složenost algoritma za izračunavanje inverzne DFT.

A može i dalje

$$x^*[n] = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right)^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$jx^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} jX^*\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$(jx^*[n])^* = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} jX^*\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\right)^*$$

$$j(jx^*[n])^* = j\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} jX^*\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\right)^* \qquad j(jx^*[n])^* = \mathrm{x}[n]$$

$$x[n] = j\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} jX^*\left[k\frac{2\pi}{N}\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\right)^* \qquad jX^*\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \mathrm{IM}\left(X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]\right) + j\mathrm{RE}\left(X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]\right)$$

za izračunavanje inverzne DFT može se koristiti bilo koji FFT potprogram, ali pri njegovom pozivu treba zameniti mesta realnom i imaginarnom delu sekvence $X[k]$. Time se po završetku rada programa dobijaju korektni vektori realnog i imaginarnog dela sekvence $x[n]$, ali takođe u izmenjenom redosledu. Ovaj pristup, kao što se vidi, ne zahteva nikakve dodatne operacije. Jedini zahtev je da se realni i imaginarni delovi korišćenih sekvenci smeštaju u dva realna vektora, a ne u jedan kompleksni vektor.

„Istovremeno“ računanje DFTa za dve realne sekvence

Ukoliko se efikasnim FFT algoritmom izračunava DFT realne sekvence, u procesu izračunavanja pojaviće se veliki broj množenja i sabiranja u kojima je jedan od argumenata jednak nuli. To je posledica činjenice da je imaginarni deo ulazne sekvence jednak nuli. Pretpostavimo da imamo dve realne sekvence iste dužine N, $x1[n]$ i $x2[n]$. Od njih se može formirati kompleksna sekvenca $x[n]$ na sledeći način:

$$x[n] = x_1[n] + jx_2[n],\ n = 0,1,\ldots, N-1$$

linearnost

$$X[k] = X_1[k] + jX_2[k],\ k = 0,1,\ldots, N-1\ ($$

Kako izdvojiti $x^*[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X^*[N-k]$

$$x_1[n] = \frac{x[n] + x^*[n]}{2} \longrightarrow X_1[k] = \frac{X[k] + X^*[N-k]}{2}$$

$$x_2[n] = \frac{x[n] - x^*[n]}{2j} \longrightarrow X_2[k] = \frac{X[k] + X^*[N-k]}{2j}$$

Digresija: često grešite $\cancel{x^*[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X^*[k]}$

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\right)^*\right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right)^* = X^*[-k] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(N-k)\frac{2\pi}{N}n}\right)^* = X^*[N-k]$$

„Brže“ izračunavanje dugačke sekvence

Prethodno opisan metod nije primenljiv kada treba odrediti DFT samo jedne realne sekvence. Međutim i tada je moguće ostvariti velike uštede u broju izračunavanja ako je broj elemenata u sekvenci paran, tj. dužina sekvence je $2N$. To je naravno čest slučaj u praksi jer je dužina sekvence najčešće neki stepen broja 2. U takvom slučaju mogu se definisati parcijalne sekvence $x_1[n]$ i $x_2[n]$ dužine N na sledeći način:

$$x_1[n] = f[2n],\ n = 0,1,\ldots, N-1$$

gde je $f[n]$ originalna sekvenca dužine $2N$

$$x_2[n] = f[2n+1],\ n = 0,1,\ldots, N-1$$

$$x[n] = x_1[n] + jx_2[n],\ n = 0,1,\ldots, N-1$$

$$X_1[k] = \frac{X[k] + X^*[N-k]}{2} \qquad X_2[k] = \frac{X[k] + X^*[N-k]}{2j} \qquad k = 0,1,\ldots, N-1$$

Nije kraj! Treba „složiti“ u sekvencu dužine $2N$

$$F[k] = \sum_{k=0}^{2N-1} f[n] e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n} = \sum_{l=0}^{N-1} f[2l] e^{-jk\frac{2\pi}{2N}2l} + \sum_{m=0}^{N-1} f[2m+1] e^{-jk\frac{2\pi}{2N}(2m+1)}$$

$$F[k] = \sum_{k=0}^{2N-1} f[n] e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n} = \sum_{l=0}^{N-1} f[2l] e^{-jk\frac{2\pi}{2N}2l} + \sum_{m=0}^{N-1} f[2m+1] e^{-jk\frac{2\pi}{2N}(2m+1)} \qquad k = 0,1,\ldots, 2N-1$$

$$F[k] = \sum_{l=0}^{N-1} x_1[l] e^{-jk\frac{2\pi}{N}l} + \sum_{m=0}^{N-1} x_2[m] e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \qquad k = 0,1,\ldots, 2N-1$$

$$F[k] = \sum_{l=0}^{N-1} x_1[l] e^{-jk\frac{2\pi}{N}2l} + e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \sum_{m=0}^{N-1} x_2[m] e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \qquad k = 0,1,\ldots, 2N-1$$

$$F[k] = X_1[k] + e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} X_2[k] \qquad k = 0,1,\ldots, 2N-1$$

Namerno ostavljeno $\frac{2\pi}{2N}$

$$F[k] = X_1[k] + W_{2N}^{k} X_2[k] \qquad k = 0,1,\ldots, 2N-1$$

Uočiti da se u račun ulazi sa dve periode $X_1[k]$ i $X_2[k]$ dužine N
Zahvaljujući rotirajućem faktoru W_{2N}^{k} dobiće se periodična sekvenca dužine $2N$

Zadatak 1 (15 poena)

Potrebno je projektovati sistem za digitalnu obradu signala koji meri harmonijska izobličenja u struji kojom uređaji opterećuju distributivnu električnu mrežu. Idealan napon distributivne električne mreže je sinusoidalnog talasnog oblika učestanosti f_0 = 50 Hz, i u idealnom slučaju, u slučaju pasivnog opterećenja, bi i struja trebalo da ima takav oblik, sa eventualno pomerenim faznim stavom. Međutim, na distribitivnu mrežu se priključuju i uređaji koji opterećuju sistem sa strujom koja odstupa od sinusoidalne i poseduje i više harmonike (npr. struja ispravljača). Sistem za digitalnu obradu signala, u što kraćem vremenskom intervalu, treba da proveri da li viši harmonici struje u nekom opsegu, po amplitudi, prelaze standardom propisane vrednosti.

a) [5] Nacrtajte šemu potrebnog sistema za digitalnu obradu signala i ukratko objasnite ulogu svakog bloka na šemi. Karakteristika senzora struje može da se aproksimira NF filtrom sa graničnom učestanošću 100 kHz.

b) [5] Odredite graničnu učestanost *anti-aliasing* filtra iz tačke a) i minimalnu učestanost odabiranja signala koja je potrebna da bi se ispravno detektovao 40. harmonik struje.

c) [5] Pod pretpostavkom da je *anti-aliasing* filtar iz tačke a) idealan, predložite učestanost odabiranja veću od minimalne i odredite minimalan broj odbiraka koji je potrebno uzeti tako da se pri učestanosti osnovnog harmonika f_0 = 50 Hz u spektru DFT-a dobiju tačno svi harmonici struje. Šta se dešava ako se usled velikog opterećenja mreže učestanost mrežnog signala promeni na 49,5 Hz? Šta se dešava ako se učestanost mrežnog signala ne menja, a DFT se računa nekim *radix*-2 algoritmom?

a) Slajd 113 iz „01 Uvod“

b) 40. harmonik $f_{40} = 40 \cdot f_U = 40 \cdot 50$ Hz $= 2$ kHz $\Rightarrow f_s > 2f_{40} = 4$ kHz, $f_{NF} > 2$ kHz
na primer $f_{NF} \approx 2.1$ kHz $f_s = 5$ KHz

c) $f_s = 5$ kHz Mora koherentno odabiranje

$$\frac{f_s}{f_p} = \frac{f_s}{f_U} = N = 100$$

Učestanosti na kojima će biti izračunat DFT

$$X[k] = X\left[k\frac{2\pi}{N}\right]$$

To dogovara realnim učestanostima

$$\left(f_k : k\frac{2\pi}{N}\right) = (f_s : 2\pi) \Rightarrow f_k = k\frac{f_s}{N} \Rightarrow f_k \epsilon \{\dots, 0, 50\ \text{HZ}, \dots, 2000\ \text{HZ}, \dots, 2500\ \text{HZ}\}$$

c) 1. Curenje spektra 2. Curenje spektra ako nije $N = 2^k$ i koherentno odabiranje ili dodate nule na 100 odmeraka da bi se dobio taj broj

Da probam da Vas zbunim

$$\frac{f_s}{f_p} = \frac{f_s}{f_U} = N = 100$$

$$f_s = 5000\ \text{Hz}$$

$$f_p = 50\ \text{Hz}$$

Za učestanost 50 Hz u jednoj periodi će biti 5000/50=100 odmeraka
Za učestanost 100 Hz u jednoj periodi će biti 5000/100=50 odmeraka
Za učestanost 150 Hz u jednoj periodi će biti 5000/150=33.33… odmeraka?
Kako je to onda koherentno odmeravanje i za učesatnost od 150 Hz?
I zašto se dobija tačna vrednost u spektru?

Zadatak 2 (25 poena)
Date su realne sekvence $x_1[n]$ i $x_2[n]$:

$$x_1[n] = \cos(2\pi Fn) \quad x_2[n] = \sin(2\pi Fn) \qquad n = 0,1,2,3,4,5,6,7.$$

a) [5] Ako je $F = 1/4$, izračunajte $X[k]$, DFT sekvence $x[n] = x_1[n] + j \cdot x_2[n]$ u $N = 8$ tačaka.
b) [5] Korišćenjem osobina DFTa izračunajte $X_1[k]$ i $X_2[k]$ iz $X[k]$.
c) [8] Ako se relativna učestanost pomenutih signala F menja u opsegu od 0 do 1 skicirajte zavisnost amplitudske karakteristike $X[2]$ od učestanosti F. Za koje vrednosti F je $|X[2]|$ jednako nuli?
d) [7] Ako se signal $x[n]$ pomnoži pravougaonom prozorskom funkcijom dužine 5 odbiraka, skicirajte amplitudski spektar DFT-a novodobijenog signala $y[n] = x[n] \cdot w_{R5}[n]$ i objasnite zbog čega se dobija takav spektar.

a) $$x[n] = \cos(2\pi Fn) + j\sin(2\pi Fn) = e^{j2\pi Fn} = e^{j\frac{2\pi}{4}n}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} e^{j\frac{2\pi}{4}n} e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \sum_{n=0}^{7} e^{j\frac{2\pi}{8}n(2-k)} = \begin{cases} 8 & k = 2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases}$$

b) $$X_1[k] = \frac{X[k] + X^*[N-k]}{2} \qquad X_2[k] = \frac{X[k] + X^*[N-k]}{2j}$$

$X[k] = [0, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 0\,]$ 0… $\qquad X^*[N-k] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0\,]$

$X_1[k] = [0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\,] \qquad X_2[k] = [0, 0, -4j, 0, 0, 0, -4j, 0\,]$

c) $$x[n] = \cos(2\pi Fn) + j\sin(2\pi Fn) = e^{j2\pi Fn}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} e^{j\frac{2\pi}{8}n(8F-k)} = \frac{1 - e^{j2\pi(8F-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{8}(8F-k)}} = 8e^{-j\frac{15\pi}{16}(8F-k)} \frac{\mathrm{sinc}\big(2\pi(8F-k)\big)}{\mathrm{sinc}\frac{2\pi}{8}(8F-k)}$$

$$X[2] = 8e^{-j\frac{15\pi}{8}(4F-1)} \frac{\mathrm{sinc}\big(4\pi(4F-1)\big)}{\mathrm{sinc}\frac{2\pi}{4}(4F-1)}$$

d) učićemo